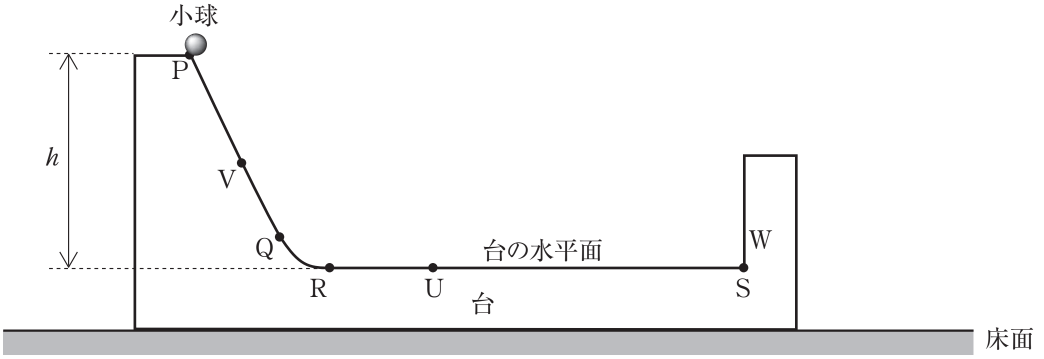
第13講　2体問題

1

図のように，頂点Pから点Qにいたる斜面と水平面RS，および点Sにおいて水平面に対して垂直な壁Wをもつ質量Mの台が，滑らかで水平な床面の上に静止している。点Qと点Rは滑らかにつながっている。また，頂点Pは図のように台の水平面RSから鉛直高さhの位置にある。この台の頂点Pから，大きさが無視できる質量mの小球を静かにはなす。小球と台との間，および台と床面との間に摩擦はないものとする。図中において，点Uは台の水平面上の一点である。なお，小球が台上を運動するとき，小球が台上から離れることはなく，台が傾くこともないものとする。小球と壁Wとの衝突のはねかえり係数をe，重力加速度の大きさをgとして，次の各問に答えなさい。答えは各問の解答群の中から最も適切なものを一つ選びなさい。



(1)　点Pで静かにはなされた小球が斜面PQおよび曲面QRに沿ってすべりおりて，最初に点Uに到達したときの，小球と台のそれぞれの床面に対する速度を求めなさい。ただし，速度は右向きを正にとるものとする。

(2)　台をすべりおりた小球は水平面を通過した後に台の右側の壁Wに衝突して再び点R方向へはね返った。壁Wで衝突した直後の小球と台のそれぞれの床面に対する速度を求めなさい。ただし，速度は右向きを正にとるものとする。

(3)　最初に小球が斜面PQおよび曲面QRに沿ってすべりおりたのち，点Uから壁Wに到達するのに要する時間をT_1，壁Wで衝突した直後から点Uに到達するまでに要する時間をT_2とする。T_2はT_1の何倍となるか求めなさい。

(4)　小球は壁Wで最初に衝突した後，点Rを通り過ぎて再び台の斜面に沿って登り，斜面上の点Vまで到達した後，再び斜面をすべりおりた。点Vの台の水平面からの鉛直高さを求めなさい。

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(5)　点Vの台の水平面からの鉛直高さが h の $\frac{1}{4}$ となったとき，小球と壁Wとの衝突のはねかえり係数 e はいくらか求めなさい。

〔解答群〕

(1)

ア．小球 $\sqrt{\frac{2ghm}{M+m}}$　　台 $-\frac{M}{m}\sqrt{\frac{2ghm}{M+m}}$

イ．小球 $\sqrt{\frac{2ghM}{M+m}}$　　台 $-\sqrt{\frac{2ghM}{M+m}}$

ウ．小球 $\sqrt{\frac{ghM}{M+m}}$　　台 $-\frac{m}{M}\sqrt{\frac{ghM}{M+m}}$

エ．小球 $\sqrt{\frac{2ghM}{M+m}}$　　台 $-\frac{m}{M}\sqrt{\frac{2ghM}{M+m}}$

オ．小球 $\sqrt{\frac{2ghm}{M+m}}$　　台 $-\frac{m}{M}\sqrt{\frac{2ghm}{M+m}}$

(2)

ア．小球 $-e\sqrt{\frac{2ghm}{M+m}}$　　台 $e\frac{M}{m}\sqrt{\frac{2ghm}{M+m}}$

イ．小球 $-e\sqrt{\frac{2ghM}{M+m}}$　　台 $e\frac{m}{M}\sqrt{\frac{2ghM}{M+m}}$

ウ．小球 $-e\sqrt{\frac{2ghM}{M+m}}$　　台 $e\sqrt{\frac{2ghM}{M+m}}$

エ．小球 $-\frac{1}{e}\sqrt{\frac{2ghM}{M+m}}$　　台 $\frac{1}{e}\frac{m}{M}\sqrt{\frac{2ghM}{M+m}}$

オ．小球 $-\frac{1}{e}\sqrt{\frac{ghM}{M+m}}$　　台 $\frac{1}{e}\frac{m}{M}\sqrt{\frac{ghM}{M+m}}$

(3)

ア．$\frac{1}{e^2}$　　イ．$\frac{m}{eM}$　　ウ．$\frac{M}{em}$　　エ．$\frac{em}{M}$　　オ．$\frac{1}{e}$

(4)

ア．$\frac{e^2mh}{M}$　　イ．eh　　ウ．e^2h　　エ．$\frac{m}{eM}h$　　オ．$\frac{eMh}{m}$

(5)

ア．0.25　　イ．0.5　　ウ．0.75　　エ．0.1　　オ．1

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

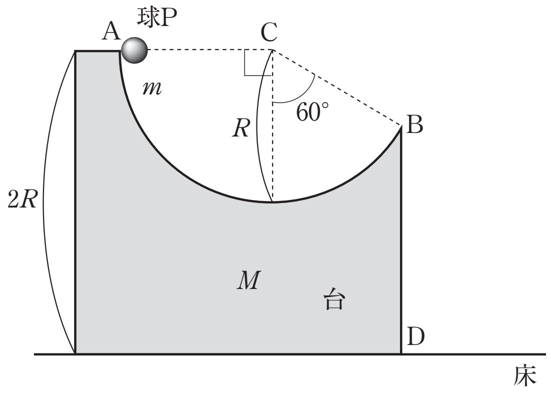
< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

以下の問の答を記入せよ。

高さ $2R$ の直方体の上部を半円柱状に削って作った図のような台を，水平な床の上に置いた。削った円柱の半径を R，円柱の中心をCとして，CAは床に平行で，CBは鉛直方向と60°の角度をなしており，それより右側は切断されている。Dは台の右端下が床と接する点であり，BDは床に垂直である。また，この台の質量を M，重力加速度を g とする。



はじめに台を床に固定し，図のように大きさの無視できる質量 m の球PをA点で静かにはなす。台と球Pの間の摩擦，および空気抵抗は無視できるものとする。

問1　B点から飛び出す直前の球Pの速さを求めよ。

問2　球PがB点から飛び出す直前の，B点からC点に向かう方向の球Pの加速度を求めよ。

問3　球PがB点から飛び出す直前に，球Pが台から受ける垂直抗力の大きさを求めよ。

問4　球PがB点から飛び出した後に最高点に達したときの，球Pの床からの高さを求めよ。

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

次に台を滑らかな床の上に置き，大きさの無視できる質量 m の球Ｐを A 点から静かにはなす。台と球Ｐの間の摩擦，台と床の間の摩擦，および空気抵抗は無視できるものとする。球Ｐが B 点から飛び出した瞬間の，床から見た，球Ｐの速度の床に平行な成分（右向きを正）を v_x，床に垂直な成分（上向きを正）を v_y，台の速度（右向きを正）を V とする。

問５　台と球Ｐの全力学的エネルギーについて，球Ｐが A 点を離れたときのエネルギーと，B 点から飛び出すときのエネルギーとの間に成り立つ関係式をかけ。ただし，A 点の位置エネルギーを 0 とする。

問６　台と球Ｐの全運動量の床に平行な成分について，球Ｐが A 点を離れたときの値と，B 点から飛び出すときの値との間に成り立つ関係式をかけ。

問７　台とともに動く観測者から見たとき，B 点から飛び出す球Ｐの方向は水平方向から 60° 上向きである。このことから v_y を v_x，V を用いて表せ。

問８　$\dfrac{m}{M}=\alpha$ としたとき，v_x を g，R，α を用いて表せ。

問９　$m=M$ のとき，球Ｐが B 点から飛び出した後に最高点に達したときの，球Ｐの床からの高さを求めよ。

問10　M を m に比べて十分大きくしていくと，球Ｐが B 点から飛び出す瞬間の速さはどのような値に近づくか。

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

質量 m の小球Aと質量 $2m$ の小球Bを，ばね定数 k の軽いばねの両端に固定し，図1のように，なめらかな水平面上を，鉛直な壁に向けて移動させた。移動の向きに座標軸をとると，小球AとBの速度は一定でともに v_0 であった。小球Bは壁と垂直に衝突し，図2のように，衝突直後の速度は $-\frac{v_0}{2}$ であった。衝突後，ばねは縮み，小球AとBが一瞬静止したとき，図3のように，小球Bは壁から s の距離にあった。その後，小球Bは壁と二度目の衝突をした。

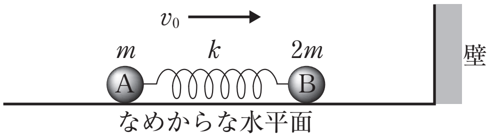


図1

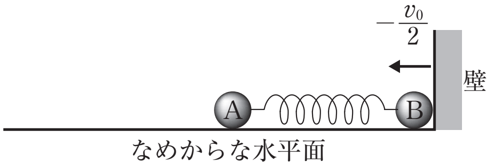


図2

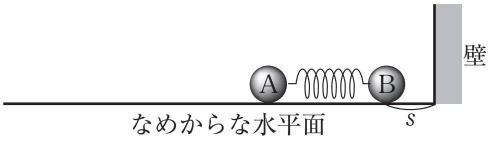


図3

問1．小球Bと壁との間の反発係数（はねかえり係数）はいくらか。

問2．一度目の衝突から二度目の衝突までの間，小球AとBの重心の速さはいくらか。

二度目の衝突後，ばねは伸び縮みをしながら，小球AとBは図4のように左向きに移動した。以上の運動を，小球AとBの重心Gからみると，小球AとBがそれぞればね定数 k_A と k_B のばねを介して重心Gにつながれ，同じ振動数 f で単振動をしているように見えた。

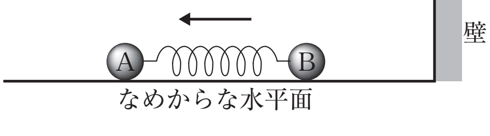


図4

問3．ばね定数 k_A と k_B を k を用いてそれぞれ表せ。

問4．振動数 f を k と m を用いて表せ。

問5．図3の距離 s を k，m，v_0 で表せ。

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第13講　確認テスト

以下の問の空所に入る適語を解答群から選択せよ。

問1　２つの物体A，Bは質量がそれぞれm，Mであり，これら２物体はx軸上を運動している。簡単のため，２物体の大きさは無視できるとする。ある時刻tにおいて，A，Bの位置の座標がそれぞれx_{A}，x_{B}であったとして，次の問に答えよ。

２つの物体AとBの重心の速度v_{G}は，２物体の全体の運動量に比例するので，A，Bが外力を受けなければ，AとBの重心は静止するかまたは等速直線運動をすることがわかる。このことは，AとBがたがいに力をおよぼしあう場合にも，A，Bが外力を受けないかぎり成り立つ。いま，自然の長さL，ばね定数kのばねの両端に，質量m，Mの２つの小物体A，Bをつけ，なめらかな水平面上に置く。ばねを自然の長さからdだけ押し縮めてA，Bを静止させた状態から静かにはなすと，A，Bはたがいに反対の向きに動き出した。このあと，ばねが最初に自然の長さに戻った瞬間を時刻$t=0$とし，このときのAの位置を原点Oとして，図１のように水平方向右向きにx軸をとる。Bは$t=0$のときにちょうど$x=L$の位置にきている。ばねの質量および空気の抵抗は無視できるとして，以下の問に答えよ。

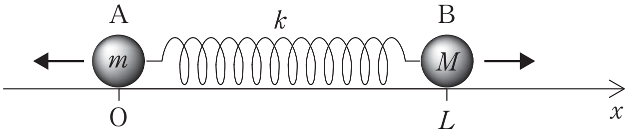


図１

(1)　$t=0$の瞬間の，小物体Aの速さはいくらか。正しいものを，次の①～⑩のうちから一つ選べ。 1

① $d\sqrt{\dfrac{k}{2m}}$　　② $d\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

③ $d\sqrt{\dfrac{k}{2M}}$　　④ $d\sqrt{\dfrac{k}{M}}$

⑤ $d\sqrt{\dfrac{k}{m+M}}$　　⑥ $d\sqrt{\dfrac{km}{M(m+M)}}$

⑦ $d\sqrt{\dfrac{kM}{m(m+M)}}$　　⑧ $d\sqrt{\dfrac{k(m+M)}{mM}}$

⑨ $d\dfrac{M}{m}\sqrt{\dfrac{k}{m+M}}$　　⑩ $d\dfrac{m}{M}\sqrt{\dfrac{k}{m+M}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2) $t=0$ の瞬間のあとの，ある時刻 t での A の座標を x_A とする。時刻 t での B の座標は，x_A を用いてどのように表されるか。正しいものを，次の①～⑪のうちから一つ選べ。 [2]

① L　② $L-x_A$

③ $L+x_A$　④ $L-\frac{m}{M}x_A$

⑤ $L+\frac{m}{M}x_A$　⑥ $L-\frac{M}{m}x_A$

⑦ $L+\frac{M}{m}x_A$　⑧ $L-\frac{m}{m+M}x_A$

⑨ $L+\frac{m}{m+M}x_A$　⑩ $L-\frac{M}{m+M}x_A$

⑪ $L+\frac{M}{m+M}x_A$

(3) 時刻 t において，A がばねから受ける力を求めると，x_A に比例し原点 O に向かう復元力となっていることがわかる。したがって，A は原点 O を中心とした単振動をする。この単振動の周期を T とすると，$T=$ [3] となる。また，小物体 B も同じ周期 T で単振動をすることがわかり，結局，A と B は，つねにたがいに反対向きに運動しながら，それぞれ単振動をする。[3] を埋めるのに正しいものを，次の①～⑩のうちから一つ選べ。

① $2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$　② $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

③ $2\pi\frac{\sqrt{kM}}{m}$　④ $2\pi\frac{m}{\sqrt{kM}}$

⑤ $2\pi\sqrt{\frac{k}{m+M}}$　⑥ $2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}}$

⑦ $2\pi\sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}}$　⑧ $2\pi\sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}}$

⑨ $2\pi\sqrt{\frac{k(2m+M)}{m(m+M)}}$　⑩ $2\pi\sqrt{\frac{m(m+M)}{k(2m+M)}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

問2　次に，問1の，ばねで連結された2つの小物体A，Bを，なめらかな水平面上で静止させた。このとき，ばねは自然の長さになっており，Aは原点Oに，Bは$x=L$の位置に静止している。いま，図2のように，質量$\dfrac{m}{2}$の小物体Cが，x軸上を正の向きに進んできて，速さuでAに弾性衝突した。CとAの衝突は瞬間的におこるものとし，x軸の正の向きを速度の正の向きとして，以下の問に答えよ。

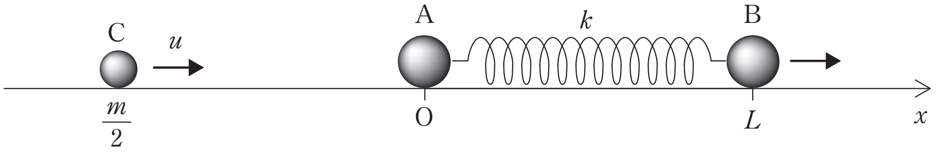


図2

(4)　CとAの衝突直後の，Cの速度はいくらか。正しいものを，次の①～⑨のうちから一つ選べ。 4

①　$-u$　②　$-\dfrac{2}{3}u$　③　$-\dfrac{1}{2}u$　④　$-\dfrac{1}{3}u$

⑤　0　⑥　$\dfrac{1}{3}u$　⑦　$\dfrac{1}{2}u$　⑧　$\dfrac{2}{3}u$

⑨　u

(5)　CとAの衝突後，AとBはたがいに近づいたり遠ざかったりして振動しながら進んでいく。このときのAとBの重心の速度はいくらか。正しいものを，次の①～⑨のうちから一つ選べ。 5

①　$\dfrac{1}{3}u$　②　$\dfrac{2}{3}u$　③　u　④　$\dfrac{m}{3M}u$

⑤　$\dfrac{2m}{3M}u$　⑥　$\dfrac{m}{M}u$　⑦　$\dfrac{m}{3(m+M)}u$　⑧　$\dfrac{2m}{3(m+M)}u$

⑨　$\dfrac{m}{m+M}u$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 13 講　解答

1

(1)　エ　(2)　イ　(3)　オ　(4)　ウ　(5)　イ

2

問１　$\sqrt{gR}$

問２　g

問３　$\dfrac{3}{2}mg$

問４　$\dfrac{15}{8}R$

問５　$0=\dfrac{1}{2}MV^2+\dfrac{1}{2}m({v_x}^2+{v_y}^2)-\dfrac{1}{2}mgR$

問６　$0=MV+mx_x$

問７　$v_y=\sqrt{3}(v_x-V)$

問８　$v_x=\sqrt{\dfrac{gR}{3\alpha^2+7\alpha+4}}$

問９　$\dfrac{27}{14}R$

問10　$\sqrt{gR}$

3

問１　$\dfrac{1}{2}$

問２　0

問３　$k_{\mathrm{A}}=\dfrac{3}{2}k$，$k_{\mathrm{B}}=3k$

問４　$\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{3k}{2m}}$

問５　$v_0\sqrt{\dfrac{m}{6k}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第13講　確認テスト

【解答】

1　⑦　　2　④　　3　⑧　　4　④　　5　⑧

【解説】

問1

(1)　$t=0$ における，A，B の速度を V_A，V_B として，

$$\begin{cases} \text{運動量保存則：} 0 = mV_A + MV_B \\ \text{エネルギー保存則：} \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mV_A{}^2 + \frac{1}{2}MV_B{}^2 \end{cases}$$

連立して，

$$V_A = \boldsymbol{d\sqrt{\frac{kM}{m(m+M)}}}_{(1)}$$

(2)　重心の位置は不変となるから，

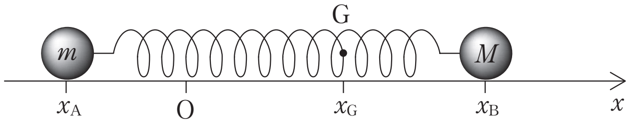
$$\frac{m\cdot 0 + M\cdot L}{m+M} = \frac{mx_A + Mx_B}{m+M} \qquad \therefore\ x_B = \boldsymbol{L - \frac{m}{M}x_A}_{(2)}$$

(3)　A が受ける力は，向きも含めて

$$k\{(x_B - x_A) - L\} = k\left(L - \frac{m}{M}x_A - x_A - L\right) = -\frac{k(m+M)}{M}x_A$$

となり，A の運動方程式は

$$ma_A = -\frac{k(m+M)}{M}x_A \qquad \text{よって}\quad T = \boldsymbol{2\pi\sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}}}_{(3)}$$



問2

(4)　衝突の前後で，ばねは気にしなくてよい。衝突直後の A と C の速度を v_A，v_C として

$$\begin{cases} \text{運動量保存則：} \frac{m}{2}u = \frac{m}{2}v_C + mv_A \\ \text{はね返り係数が1：} -(u-0) = v_C - v_A \end{cases}$$

2式より，

$$v_C = \boldsymbol{-\frac{1}{3}u}_{(4)} \quad ,\quad v_A = \frac{2}{3}u$$

(5)

$$v_A = \frac{m\cdot\left(\frac{2}{3}u\right) + M\cdot 0}{m+M} = \boldsymbol{\frac{2m}{3(m+M)}u}_{(5)}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。